

Datum měření: 22.11.2013                      Skupina: 7  
 Jméno: David Roesel                              Kroužek: ZS 5  
 Spolupracovala: Tereza Schönfeldová      Klasifikace:

---

## 1 Pracovní úkoly

1. Změřte závislost relativního délkového prodloužení  $\Delta l/l$  ocelového drátu na napětí při zatěžování a odlehčování drátu a sestrojte graf této závislosti. Vypočítejte metodou nejmenších čtverců modul pružnosti v tahu ocelového drátu.
2. Změřte závislost průhybu  $z$  na velikosti síly  $F$  při zatěžování i odlehčování ocelového nosníku a narýsujte graf této závislosti. Metodou nejmenších čtverců vypočítejte modul pružnosti v tahu. O způsobu zpracování výsledků metodou nejmenších čtverců se dočtete v příloze dokumentu [1].
3. V přípravě odvoďte vzorec pro plošný moment setrvačnosti obdélníkového průřezu šířky  $a$  a výšky  $b$ .
4. Změřte závislost úhlu zkroucení  $\varphi$  ocelového drátu na velikosti kroutícího momentu při postupném zvětšování a postupném zmenšování tohoto momentu. Výsledky měření vynesete do grafu. Metodou nejmenších čtverců vypočtete modul pružnosti ve smyku  $G$  drátu.
5. Na torzním kyvadle změřte moment setrvačnosti základního systému  $I_0$  a modul pružnosti ve smyku  $G$  ocelového drátu. Dobu torzních kmitů změřte postupnou metodou.
6. V přípravě odvoďte vzorce pro výpočet modulu pružnosti ve smyku  $G$  a momentu setrvačnosti základního systému torzního kyvadla  $I_0$ .

## 2 Vypracování

### 2.1 Použité přístroje

Stojan s indikátorovými hodinkami a ocelovým drátem, zařízení na měření modulu pružnosti v tahu z průhybu nosníku, zařízení na měření modulu pružnosti ve smyku z torze drátu statickou a dynamickou metodou, mikrometrický šroub, posuvné měřítko, svinovací metr, váhy, sada závaží, mobilní telefon.

### 2.2 Teoretický úvod

#### 2.2.1 Modul pružnosti v tahu a modul pružnosti ve smyku

Pružnost homogenního izotropního tělesa popisujeme při malých deformacích dvěma nezávislými materiálovými konstantami, kterými jsou buď *modul pružnosti v tahu* (Youngův modul)  $E$  a Poissonovo číslo  $\mu$ , anebo např. *modul pružnosti v tahu*  $E$  a *modul pružnosti ve smyku*  $G$ .

Uvažujme hranol či válec o průřezu  $S$  a délce  $l$  s upevněným jedním koncem. Necháme-li ve směru podélné osy působit sílu  $F$ , vyvolá prodloužení původní délky  $l$  o  $\Delta l$ . Mezi napětím  $F/S$  a relativním prodloužením  $\Delta l/l$  platí tzv. Hookeův zákon

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}. \quad (1)$$

Konstanta  $E$  závisí na materiálu a nazývá se *modul pružnosti v tahu* (neboli Youngův modul).

Pro druhý případ uvažujme krychli o hraně  $l$  z materiálu, jehož vlastnosti chceme zkoumat. Dolní podstavu upevníme a v horní necháme působit sílu  $F$  rovnoběžně s dolní podstavou, která horní postavu posune a změní původně pravý úhel o malý úhel  $\gamma$  tak jako na Obr. 5. Mezi smykovým napětím  $F/S$  a smykovou deformací (úhlem smyku  $\gamma$ ) platí pro malé posunutí vztah

$$\frac{F}{S} = G\gamma, \quad (2)$$

kde  $G$  je konstanta určená vlastnostmi materiálu a nazývá se *modul pružnosti ve smyku*.

### 2.2.2 Ohyb nosníku

Uvažujme přímý nosník délky  $l$  o průřezu libovolného tvaru ohnutý stejně jako na Obr. 6. Chceme určit vztah mezi rozměry a tvarem nosníku, konstantami charakterizujícími vlastnosti materiálu a mezi silami působícími na nosník. Z Obr. 7 můžeme odvodit, že je prodloužení  $\Delta l$  úměrné  $y$  podle vzorce

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}, \quad (3)$$

kde  $l$  je délka a  $R$  poloměr křivosti nosníku. Stejně tak napětí  $\Delta F/\Delta S$  je úměrné  $y$  podle vztahu

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = E \frac{y}{R}. \quad (4)$$

Ze stejného obrázku můžeme stanovit pro velikost momentu dvojice sil  $M$  vztah

$$M = \int_S y \, dF = \frac{E}{R} \int_S y^2 \, dS, \quad (5)$$

kde  $S$  je příčný průřez nosníku a integrál na pravé straně nazveme plošným momentem setrvačnosti  $I$ , jehož velikost jsme pro náš případ (obdélníkový průřez rozměrů  $a \cdot b$ ) v domácí přípravě odvodili následovně:

$$I = \int_S y^2 \, dS = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \, dx dy = a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \, dy = \frac{ab^3}{12}. \quad (6)$$

Pro pohybový moment nosníku s pevnými konci, který ohýbáme uprostřed (viz Obr. 8), platí

$$M(x) = \frac{F}{2} \left( \frac{L}{2} - x \right), \quad (7)$$

kde  $F$  je síla působící na nosník v bodě závěsu a  $L$  jeho délka. Kombinací předchozích vztahů dostáváme vztah

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{F}{2EI} \left( \frac{L}{2} - x \right) \quad (8)$$

a jeho integrací za použití počátečních podmínek ( $x = 0$ ,  $dz/dx = 0$ ) a okrajových podmínek ( $x = L/2$ ,  $z = 0$ ) pak

$$z(x) = \frac{F}{2EI} \left( \frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{FL^3}{48EI}, \quad (9)$$

potažmo (pro průhyb uprostřed nosníku)

$$z(0) = -\frac{FL^3}{48EI}. \quad (10)$$

### 2.2.3 Torze válce kruhového průřezu

Uvažujme válec o délce  $L$  a poloměru  $R$ , jehož horní podstava je upevněna a spodní je vůči ní stočena o úhel  $\varphi$  (tak jako na Obr. 9). Tuto deformaci nazýváme torze. Pro torzi definujeme veličinu  $\alpha$ , která se nazývá mírou torze a je to úhel stočení dvou kolmých průřezů vzdálených od sebe o jednotkovou délku. Platí tedy vztah  $\varphi = L\alpha$ .

Představme si elementární hranol vyříznutý z válce o délce  $r d\psi$ , šířce  $dr$  a výšce  $dl$  (viz Obr. 4). Tento hranol se při torzi deformuje. Neuvažujeme-li posunutí a otočení kolem podélné osy válce, prodělá každý elementární hranol smyk. Pro hranol vzdálený o  $r$  od osy válce je posunutí spodní podstavy vůči horní  $\delta = r\alpha dl$  a pro úhel smyku  $\gamma = \delta/dl = r\alpha$ . Z Obr. 4 vidíme, že pro přírůstek momentu sil  $M$  platí

$$dM = r \frac{F}{S} dS, \quad (11)$$

kde  $dS$  je plocha podstavy elementárního hranolu  $dS = r d\psi dr$ . Celkový moment sil  $M$  vyvolávající torzi válce je pak

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \tau d\psi dr = G\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 d\psi dr = G \frac{\pi R^4}{2L} \varphi, \quad (12)$$

příčemž při tíhovém zrychlení  $g$  a poloměru kladky  $a$  je pro moment síly dvou závaží o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  roven

$$M = (m_1 + m_2)ga. \quad (13)$$

### 2.2.4 Torzní kyvadlo

Pro tyč torzního kyvadla platí

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -K\varphi, \quad K = \frac{G\pi R^4}{2L}, \quad (14)$$

kde  $I$  je moment setrvačnosti tyče a na ni přidaných závaží,  $\varphi$  úhel torze drátu,  $G$  modul pružnosti ve smyku,  $t$  čas,  $R$  poloměr a  $L$  délka drátu. V domácí přípravě jsme odvodili vztah pro modul pružnosti ve smyku  $G$

$$G = \frac{8\pi LI}{T^2 R^4} \quad (15)$$

a dále víme, že pro moment setrvačnosti  $I_v$  dutého válce o vnitřním a vnějším poloměru  $r_1$ ,  $r_2$ , hmotnosti  $m$  a výšce  $v$  vzhledem k ose kolmé k ose rotace válce platí při délce ramena tyče  $a$

$$I_v = M \cdot \left(a - \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{M}{4} \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{v^2}{3}\right). \quad (16)$$

V domácí přípravě jsme dále odvodili pro momenty setrvačnosti dutých válců  $I_1$ ,  $I_2$  umístěných na tyči torzního kyvadla, pro jejich periody  $T_1$ ,  $T_2$  a moment setrvačnosti samotné tyče  $I_0$

$$I_0 = \frac{I_1 T_2^2 - I_2 T_1^2}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (17)$$

Největší přesnosti a nejsnadnějšího výpočtu dosáhneme v případě, že zvolíme za závaží o momentu  $I_2$  závaží o nulové hmotnosti (a tím pádem i nulového momentu setrvačnosti). Tím se nám vzorec zjednoduší (při přeznačení  $T_2 \rightarrow T_0$ ) na

$$I_0 = \frac{I_1 T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}. \quad (18)$$

## 2.3 Postup měření

### 2.3.1 Měření modulu pružnosti v tahu $E$ z prodloužení drátu

Modul pružnosti v tahu ocelového drátu jsme měřili přímou metodou z prodloužení  $\Delta l$  v závislosti na napínací síle. Drát byl napínán silou  $F$  způsobenou vahou závaží, které bylo zavěšené na jeho neupevněném konci. Drát jsme nejdříve napnuli závažím o hmotnosti kolem 1 kg. Následně jsme změřili jeho délku a průměr. Vlastní měření jsme prováděli následovně (s již sestavenou aparaturou):

1. Na háček indikátorových hodinek (nebo na poslední zavěšené závaží) zavěsíme jemně (z důvodu hystereze) závažíčko o známé hmotnosti.
2. Poklepeme na hodinky, aby se ručička ustálila.
3. Odečteme a zapíšeme hodnotu spolu s hmotností aktuálně zavěšené sady závažíček.
4. Předchozí kroky opakujeme po přidání a odebrání každého závaží během zatěžování a odlehčování hodinek.

### 2.3.2 Měření modulu pružnosti v tahu $E$ z průhybu nosníku

Aparatura již byla sestavena v podobě nosníku (kovové tyče obdélníkového průřezu na dvou břitech ve vzdálenosti  $L$ , kterou jsme změřili) a mikroskopu s okulárním mikrometrem. Pomocí mikrometrického šroubu jsme také změřili šířku a výšku tyče a zatěžovali jsme ji uprostřed závažím působícím silou  $F$ . Při přidávání a odebrání závažíček jsme stejně jako v minulé úloze zaznamenávali její průhyb ve středu, který je dán vztahem (10), a pro který platí, že jeden dílek v mikroskopu odpovídá 0,0253 mm průhybu.

### 2.3.3 Měření modulu pružnosti ve smyku $G$ torzí drátu statickou metodou

Aparatura byla již sestavena i k této části. Modul pružnosti ve smyku drátu o délce  $L$  a poloměru  $R$  jsme určili ze vztahu (12). Moment sil  $M$ , který torzi vyvolává, je tvořen závažími, které zavěšujeme na kladky tak jako na Obr. 10. Před měřením jsme určili poloměr kladky, která způsobuje tento moment, jako  $a$  a zavěšovali jsme na ni závaží o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  ve dvou směrech. Závaží jsme se snažili kombinovat tak, aby byl rozdíl sil působících na obou ramenech co nejmenší. Při vlastním měření jsme podobně jako v předchozích dvou určovali úhel  $\varphi$  oproti základní pozici na úhloměru kladky při přidávání a následném odebrání závaží.

### 2.3.4 Měření modulu pružnosti ve smyku $G$ torzí drátu dynamickou metodou

Aparatura již byla sestavena v podobě drátu o délce  $L$  a poloměru  $R$ , na kterém byla zavěšena tyč s možností přidání kruhových disků na její konce. Změřili jsme obě vlastnosti drátu, délku a tloušťku tyče a poté také rozměry a hmotnost přidaného většího disku. Následně jsme změřili dvacetkrát periodu kmitů jak samotné tyče  $T_0$ , tak tyče s přidanými disky na okrajích  $T_1$  tak, abychom získali postupnou metodou deset nezávislých měření a podle (18) spočítali moment setrvačnosti samotné tyče  $I_0$  se znalostí teoreticky spočítaného (16)  $I_1$ .

## 2.4 Naměřené hodnoty

Před začátkem celého měření bylo potřeba zvážit všechna používaná závaží, což jsme učinili. Jednotlivé hmotnosti jsme určili s přesností 0,02 g a brali je vždy jako různé hodnoty (v rozsahu 100,30 - 101,18 g).

### 2.4.1 Měření modulu pružnosti v tahu $E$ z prodloužení drátu

Délku drátu jsme určili pomocí svinovacího metru jako  $L = (98,6 \pm 0,1)$  cm, jeho průměr pak pomocí mikrometrického šroubu jako  $D = (0,215 \pm 0,001)$  mm. Chyby jsme v obou případech určili podle nejmenšího dílku použitého měřítka. Naměřené a spočítané hodnoty jsou vyneseny v Tab. 1,  $F/S$  jsme počítali ze vztahů  $F = mg$  a

$S = \pi R^2$ , kde jedinou dříve nezmíněnou veličinou je poloměr drátu  $R$ . Hodnoty pro zatěžování i odlehčování jsou dále vyneseny v grafu na Obr. 1 spolu s lineárním proložením z parametrů metody nejmenších čtverců.

Metoda nejmenších čtverců [3] nám dává parametry  $a_1 = (2,01 \pm 0,01) \cdot 10^{11}$ ,  $b_1 = (-0,10 \pm 0,02)$  pro zatěžování drátu a  $a_2 = (2,01 \pm 0,01) \cdot 10^{11}$ ,  $b_2 = (-0,16 \pm 0,03)$  pro odlehčování (parametry odpovídají jednotkám Pa). Z toho dostáváme podle parametrů  $a_{(1,2)}$  finální hodnoty modulu pružnosti  $E_{(1,2)}$  v tahu (1) i s chybou (5.5) jako

$$E_1 = (2,01 \pm 0,01) \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \quad E_2 = (2,01 \pm 0,01) \cdot 10^{11} \text{ Pa}. \quad (19)$$

#### 2.4.2 Měření modulu pružnosti v tahu $E$ z průhybu nosníku

Délku nosníku jsme určili pomocí svinovacího metru jako  $L = (49,75 \pm 0,05)$  cm, jeho rozměry pak pomocí mikrometrického šroubu jako  $a = (9,955 \pm 0,005)$  mm a  $b = (3,965 \pm 0,005)$  mm. Chyby jsme ve všech třech případech určili podle nejmenšího dílku použitého měřítka. Naměřené a spočítané hodnoty jsou vyneseny v Tab. 2,  $F$  jsme počítali ze vztahu  $F = mg$ . Hodnoty pro zatěžování i odlehčování jsou dále vyneseny v grafu na Obr. 2 spolu s lineárním proložením z parametrů metody nejmenších čtverců. Metoda nejmenších čtverců [3] nám dává parametry  $a_1 = (3,97 \pm 0,02) \cdot 10^3$ ,  $b_1 = (-1,09 \pm 0,03)$  pro zatěžování drátu a  $a_2 = (3,98 \pm 0,01) \cdot 10^3$ ,  $b_2 = (-1,18 \pm 0,02)$  pro odlehčování (parametry odpovídají jednotkám  $\text{N} \cdot \text{m}$ ). Z toho dostáváme podle parametrů  $a_{(1,2)}$  finální hodnoty modulu pružnosti  $E_{(1,2)}$  v tahu z průhybu nosníku (10) i s chybou (5.5), (5.4) jako

$$E_1 = (1,97 \pm 0,01) \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \quad E_2 = (1,97 \pm 0,02) \cdot 10^{11} \text{ Pa}. \quad (20)$$

#### 2.4.3 Měření modulu pružnosti ve smyku $G$ torzí drátu statickou metodou

Délku drátu jsme určili pomocí svinovacího metru jako  $L = (65,80 \pm 0,05)$  cm, jeho průměr pak pomocí mikrometrického šroubu jako  $D = (1,985 \pm 0,005)$  mm a poloměr kladky pomocí posuvného měřítka jako  $a = (40,50 \pm 0,05)$  mm. Chyby jsme v obou případech určili podle nejmenšího dílku použitého měřítka. Naměřené a spočítané hodnoty jsou vyneseny v Tab. 3. Hodnoty pro zatěžování i odlehčování jsou dále vyneseny v grafu na Obr. 3 spolu s lineárním proložením z parametrů metody nejmenších čtverců. Metoda nejmenších čtverců [3] nám dává parametry  $a_1 = (0,22 \pm 0,01)$ ,  $b_1 = (-5 \pm 7) \cdot 10^{-3}$  pro zatěžování drátu a  $a_2 = (0,22 \pm 0,01)$ ,  $b_2 = (-4 \pm 8) \cdot 10^{-3}$  pro odlehčování (parametry odpovídají jednotkám  $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ ). Z toho dostáváme podle parametrů  $a_{(1,2)}$  finální hodnoty modulu pružnosti  $G_{(1,2)}$  ve smyku torzí drátu statickou metodou (12, 13) i s chybou (5.5), (5.4) jako

$$G_1 = (9,52 \pm 0,05) \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad G_2 = (9,39 \pm 0,05) \cdot 10^{10} \text{ Pa}. \quad (21)$$

#### 2.4.4 Měření modulu pružnosti ve smyku $G$ torzí drátu dynamickou metodou

Délku drátu jsme určili pomocí svinovacího metru jako  $L = (52,40 \pm 0,05)$  cm, jeho průměr pak pomocí mikrometrického šroubu jako  $D = (0,459 \pm 0,005)$  mm. Hmotnost většího přídavného disku jsme určili jako  $m = (127,31 \pm 0,05)$  g, jeho vnitřní průměr pomocí mikrometrického šroubu pak jako  $d_1 = (7,925 \pm 0,005)$  mm a vnější průměr pomocí posuvného měřítka jako  $d_2 = (4,98 \pm 0,05)$  mm. Výšku přídavného disku jsme změřili pomocí mikrometrického šroubu jako  $v = (7,958 \pm 0,005)$  mm a délku tyče jako  $2a = (24,90 \pm 0,05)$  cm. Chyby jsme ve všech případech určili podle nejmenšího dílku použitého měřítka. Spočítané hodnoty postupnou metodou jsou vyneseny v Tab. 4. Z naměřených hodnot jsme pomocí (16) získali hodnotu momentu setrvačnosti  $I_1$  i s chybou (5.4) jako

$$I_1 = (3,74 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad (22)$$

z čehož jsme se znalostí změřené periody kmitů  $T_1 = (13,3 \pm 0,1)$  s a  $T_0 = (4,3 \pm 0,1)$  s dopočítali podle (18) hodnotu momentu setrvačnosti samotné tyče  $I_0$  s chybou (5.4) a tyče s přidaným závažím  $I_{1+0}$  s chybou (5.4) jako

$$I_0 = (4,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_{1+0} = (4,17 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (23)$$

Z toho už snadno dostaneme podle (15) hodnoty modulu pružnosti ve smyku  $G_{(0,1)}$  s chybou (5.4) z měření bez závaží a s ním jako

$$G_0 = (1,13 \pm 0,02) \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \quad G_1 = (1,13 \pm 0,08) \cdot 10^{11} \text{ Pa}. \quad (24)$$

## 2.5 Diskuse

### 2.5.1 Měření modulu pružnosti v tahu $E$ z prodloužení drátu

Výsledky měření první úlohy odpovídají přibližně tabulkovým hodnotám [4] modulu pružnosti v tahu oceli, který se pohybuje v rozsahu  $1,9 - 2,1 \cdot 10^{11}$  Pa podle příměsí. Případné systematické chyby mohly nejspíše vzniknout při měření délky a poloměru drátu, jelikož následně ovlivnily oba výsledky. Chyby hmotností jednotlivých závaží byly relativně malé a finální hodnoty příliš neovlivnily. Měření by se dalo zpřesnit jemnějším zavěšováním závaží, naměřením většího počtu hodnot, použitím hodin, do kterých není potřeba klepat na ustálení hodnoty, a měřením délky drátu v přesněji definovaných bodech a přesnějším měřítkem.

### 2.5.2 Měření modulu pružnosti v tahu $E$ z průhybu nosníku

Výsledky měření druhé úlohy taktéž odpovídají přibližně tabulkovým hodnotám [4] modulu pružnosti v tahu oceli, stejně jako v první úloze. Systematické chyby zde mohly opět nejspíše vzniknout měřením délky nosníku, případně odečítáním hodnot z mikroskopu, ve kterém kurzor značně osciloval. Nosník také navíc nemusel být dokonale homogenní a mohl být na některých místech nerovnoměrně poškozen. Pro chyby hmotností jednotlivých závaží platí to samé co v předchozí úloze. Měření by se dalo také zpřesnit jemnějším zavěšováním závaží, naměřením většího počtu hodnot (případně lepším vynulováním stupnice tak, abychom začínali v okolí nuly a ne jedničky) a měřením délky nosníku přesnějším měřítkem.

### 2.5.3 Měření modulu pružnosti ve smyku $G$ torzí drátu statickou metodou

Výsledky měření třetí úlohy jsou stejného řádu jako tabulková hodnota [4] modulu pružnosti ve smyku oceli  $G_t = 7,95 \cdot 10^{10}$  Pa, avšak je možné, že došlo k systematické chybě při měření průměru drátu. Změna této hodnoty přímo ovlivňuje výsledek a nebyla by třeba velká změna, aby se výsledek dostal přesně na tabulkovou hodnotu z našich  $G_2 = (9,39 \pm 0,05) \cdot 10^{10}$  Pa. Bereme-li v úvahu systematické chyby, ke kterým zde mohlo dojít ve stejných místech jako u prvního úkolu, můžeme toto měření prohlásit za úspěšné. I v tomto případě jsme byli limitováni prostorem pod kladkou v počtu závaží, které bylo možno najednou zavěsit, a proto se nám nepodařilo naměřit 10 hodnot.

### 2.5.4 Měření modulu pružnosti ve smyku $G$ torzí drátu dynamickou metodou

Výsledky měření čtvrté úlohy jsou na tom ještě o trochu hůř než při měření statickou metodou. Bereme-li však v úvahu možné systematické chyby, je výsledek stále ještě relativně blízko tabulkovým hodnotám a měření se nedá prohlásit za nepodařené. Určování většiny hodnot by však šlo zpřesnit použitím přesnějších měřít, pečlivějším odečítáním z mikrometrického šroubu, přesnějším našroubováním disku na konec tyče, případně zvýšením přesnosti měření period kmitů (buď použitím přesnějšího nástroje než mobilního telefonu nebo měřením period na delším časovém úseku).

## 3 Závěr

Úspěšně jsme změřili závislost relativního délkového prodloužení  $\Delta l/l$  ocelového drátu na napětí při zatěžování a odlehčování drátu a sestrojili jsme graf této závislosti. Metodou nejmenších čtverců jsme vypočítali modul pružnosti v tahu ocelového drátu jako  $E_1 = (2,01 \pm 0,01) \cdot 10^{11}$  Pa, což odpovídá tabulkovým hodnotám. Změřili jsme také závislost průhybu  $z$  na velikosti síly  $F$  při zatěžování i odlehčování ocelového nosníku a vynesli graf této závislosti.

Metodou nejmenších čtverců jsme spočítali modul pružnosti oceli v tahu jako  $E_1 = (1,97 \pm 0,01) \cdot 10^{11}$  Pa, což také odpovídá tabulkovým hodnotám. V domácí přípravě jsme odvodili vzorec pro plošný moment setrvačnosti obdélníkového průřezu šířky  $a$  a výšky  $b$ .

Dále jsme změřili závislost úhlu zkroucení  $\varphi$  ocelového drátu na velikosti kroutícího momentu při jeho postupném zvětšování a zmenšování. Výsledky měření jsme vynesli do grafu. Metodou nejmenších čtverců jsme vypočetli modul pružnosti ve smyku oceli jako  $G_1 = (9,52 \pm 0,05) \cdot 10^{10}$  Pa a  $G_2 = (9,39 \pm 0,05) \cdot 10^{10}$  Pa, což se blíží tabulkovým hodnotám. Na torzním kyvadle jsme dále změřili moment setrvačnosti základního systému jako  $I_0 = (4,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$  kg  $\cdot$  m<sup>2</sup> a modul pružnosti ve smyku ocelového drátu jako  $G_0 = (1,13 \pm 0,08) \cdot 10^{11}$  Pa, což se blíží tabulkovým hodnotám. V domácí přípravě jsme dále odvodili vzorce pro výpočet modulu pružnosti ve smyku  $G$  a momentu setrvačnosti základního systému torzního kyvadla  $I_0$ .

## 4 Použitá literatura

- [1] Kolektiv KF, *Návod k úloze: Měření modulu pružnosti v tahu a modulu pružnosti ve smyku* [Online], [cit. 22. března 2014]  
[http://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/98/mod\\_resource/content/4/2\\_Modul\\_pruznosti.pdf](http://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/98/mod_resource/content/4/2_Modul_pruznosti.pdf)
- [2] Kolektiv KF, *Chyby měření* [Online], [cit. 22. března 2014]  
<http://praktikum.fjfi.cvut.cz/documents/chybynav/chyby-o.pdf>
- [3] Kolektiv KACH UPOL, *Hodnocení analytických výsledků* [Online], [cit. 22. března 2014]  
<http://ach.upol.cz/ucebnice/hodnoceni7.htm>
- [4] J. Mikulčák a kol., *Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce*. Prometheus, Praha 2009.  
ISBN 978-80-7196-264-9

## 5 Přílohy

### 5.1 Domácí příprava

Domácí příprava je přiložena k protokolu.

### 5.2 Statistické zpracování dat

Pro statistické zpracování využíváme aritmetického průměru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (5.1)$$

jehož chybu spočítáme jako

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (5.2)$$

kde  $x_i$  jsou jednotlivé naměřené hodnoty,  $n$  je počet měření,  $\bar{x}$  aritmetický průměr a  $\sigma_0$  jeho chyba [2].  
Při nepřímém měření počítáme hodnotu s chybou dle následujících vztahů:

$$u = f(x, y, z, \dots), \quad (5.3)$$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_x), \quad y = (\bar{y} \pm \sigma_y), \quad z = (\bar{z} \pm \sigma_z), \quad \dots,$$

kde  $u$  je veličina, kterou určíme nepřímo z měřených veličin  $x, y, z, \dots$

Pak

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots),$$

$$\sigma_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots}, \quad (5.4)$$
$$u = (\bar{u} \pm \sigma_u).$$

#### 5.2.1 Metoda nejmenších čtverců

Snažíme-li se metodou nejmenších čtverců proložit data lineární závislostí  $Y_i = ax_i + b$ , dosazujeme hodnoty  $x_i, y_i$  a snažíme se najít parametry  $a$  a  $b$  tak, aby byl součet všech kvadratických odchylek  $\Delta Y_i^2$  minimální. Toho dosáhneme pomocí následujících vzorců [3]:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}, \quad \sigma_a = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2}{(n-2) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right)}}, \quad (5.5)$$

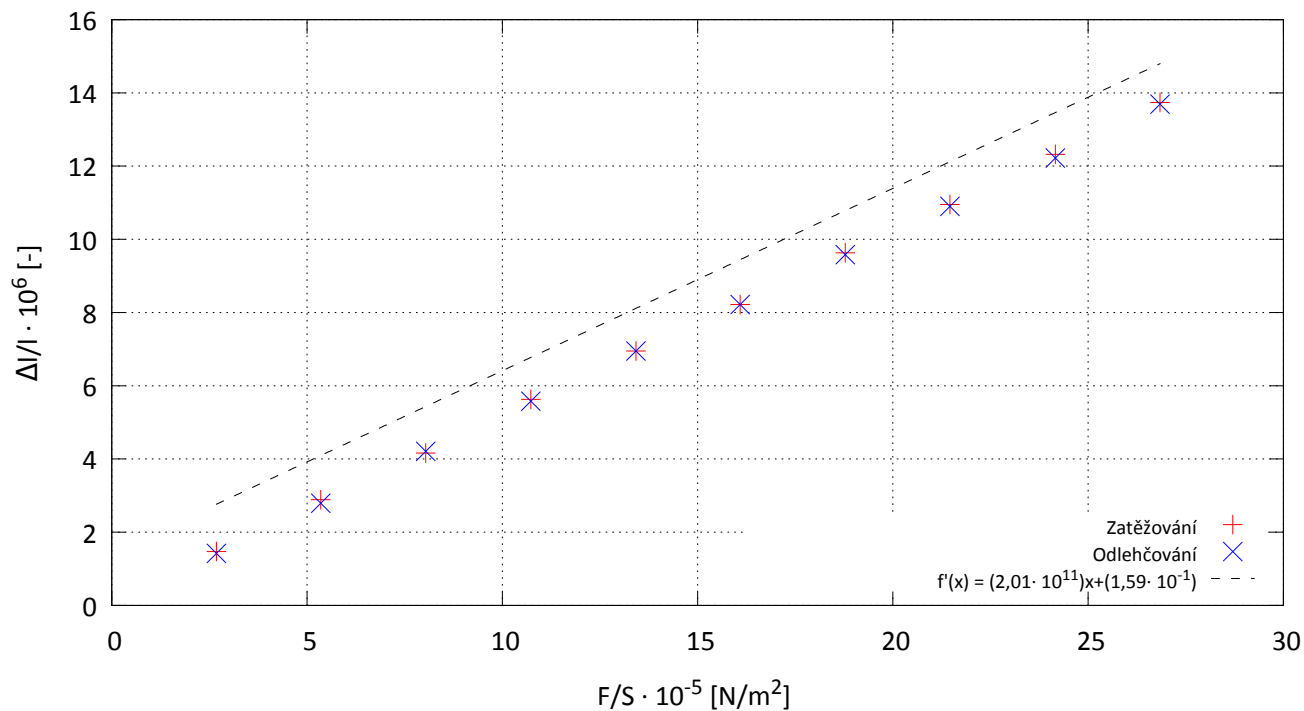
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}, \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2}{n(n-2) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right)}}. \quad (5.6)$$



### 5.3 Tabulky a grafy

$m$ [g]	$\sigma_m$ [g]	$F/S$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\sigma_{F/S}$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\Delta l_1/l$ [-]	$\sigma_{\Delta l_1/l}$ [-]	$\Delta l_2/l$ [-]	$\sigma_{\Delta l_2/l}$ [-]
100,68	0,02	2,68E+05	2E+03	1,47E-06	5E-08	1,42E-06	5E-08
200,98	0,03	5,35E+05	5E+03	2,89E-06	5E-08	2,79E-06	5E-08
301,84	0,03	8,04E+05	7E+03	4,16E-06	5E-08	4,21E-06	5E-08
402,70	0,04	1,07E+06	1E+04	5,63E-06	5E-08	5,58E-06	5E-08
503,54	0,04	1,34E+06	1E+04	6,95E-06	5E-08	6,95E-06	5E-08
603,90	0,05	1,61E+06	1E+04	8,22E-06	5E-08	8,22E-06	5E-08
704,72	0,05	1,88E+06	2E+04	9,63E-06	5E-08	9,58E-06	5E-08
805,56	0,06	2,15E+06	2E+04	1,10E-05	5E-08	1,09E-05	5E-08
906,64	0,06	2,42E+06	2E+04	1,23E-05	5E-08	1,22E-05	5E-08
1007,46	0,06	2,68E+06	2E+04	1,37E-05	5E-08	1,37E-05	5E-08

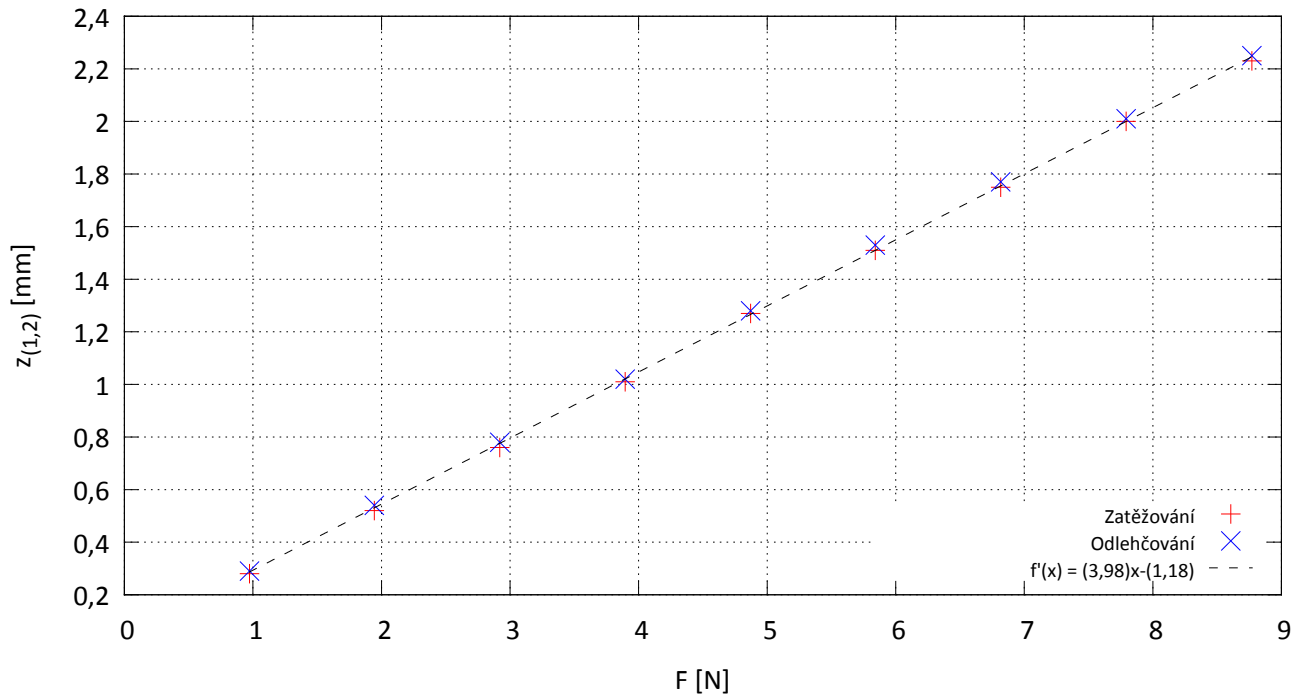
Tab. 1: Naměřené a spočítané hodnoty při měření modulu pružnosti v tahu  $E$  z prodloužení drátu:  $m$  a  $\sigma_m$  jsou celková hmotnost zavěšených závaží s chybou,  $F/S$  a  $\sigma_{F/S}$  napětí drátu a jeho chyba (5.4),  $\Delta l_{1,2}/l$  relativní prodloužení drátu při zatěžování a odlehčování drátu a  $\sigma_{\Delta l_{1,2}/l}$  jejich chyby (5.4).



Obr. 1: Graf závislosti relativního délkového prodloužení  $\Delta l/l$  na napětí  $F/S$  při zatěžování a odlehčování drátu. Proloženo funkcí inverzní k  $f(x) = ax + b$  s druhou řadou parametrů získaných z metody nejmenších čtverců.

$m$ [g]	$\sigma_m$ [g]	$F$ [N]	$\sigma_F$ [N]	$z_1$ [mm]	$\sigma_{z_1}$ [mm]	$z_2$ [mm]	$\sigma_{z_2}$ [mm]
100,68	0,02	0,9738	0,0002	0,28	0,01	0,29	0,01
200,98	0,03	1,9440	0,0003	0,52	0,01	0,54	0,01
301,84	0,03	2,9196	0,0003	0,76	0,01	0,78	0,01
402,70	0,04	3,8952	0,0004	1,01	0,01	1,02	0,01
503,54	0,04	4,8706	0,0004	1,27	0,01	1,28	0,01
603,90	0,05	5,8413	0,0005	1,51	0,01	1,53	0,01
704,72	0,05	6,8165	0,0005	1,75	0,01	1,77	0,01
805,56	0,06	7,7919	0,0006	2,00	0,01	2,01	0,01
906,64	0,06	8,7696	0,0006	2,23	0,01	2,25	0,01

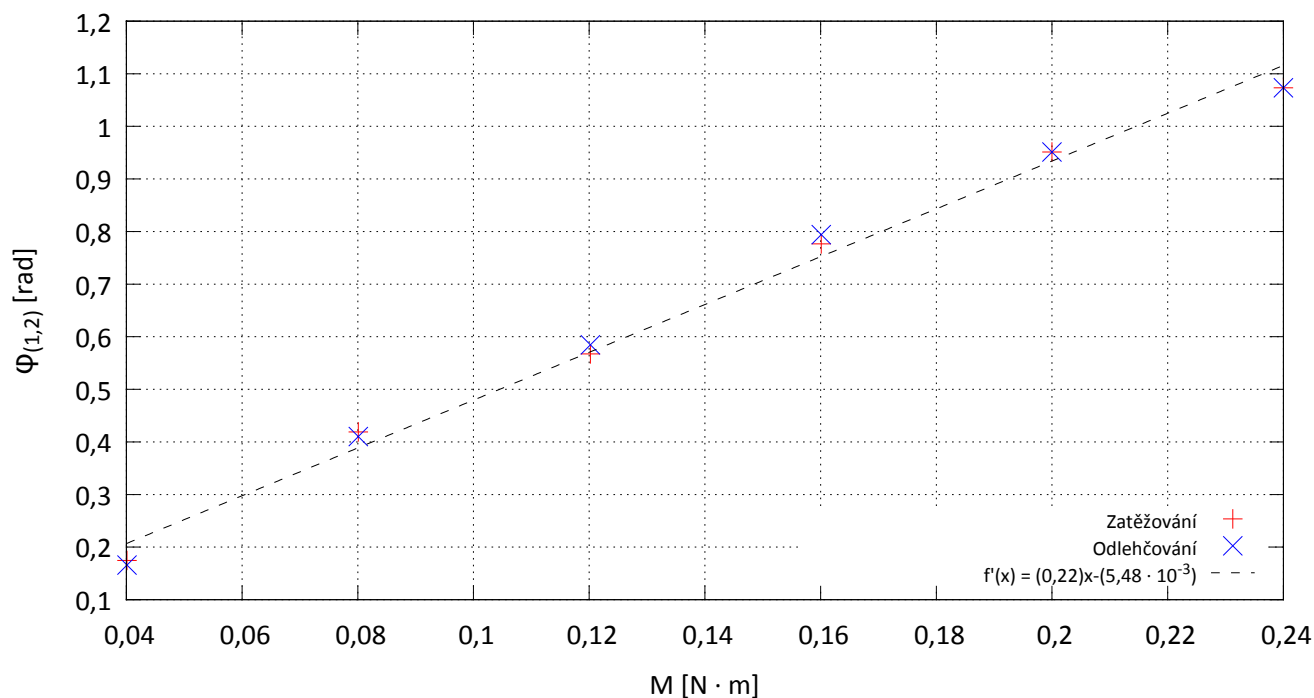
Tab. 2: Naměřené a spočítané hodnoty při měření modulu pružnosti v tahu  $E$  z průhybu nosníku:  $m$  a  $\sigma_m$  jsou celková hmotnost zavěšených závaží s chybou,  $F$  a  $\sigma_F$  síla působící na nosník a její chyba (5.4),  $z_{1,2}$  průhyb nosníku při zatěžování a odlehčování v jeho středu a  $\sigma_{z_{1,2}}$  jejich chyby (5.4).



Obr. 2: Graf závislosti průhybu nosníku  $z_{(1,2)}$  na síle  $F$  působící v jejím středu při zatěžování a odlehčování. Proloženo funkcí inverzní k  $f(x) = ax + b$  s druhou řadou parametrů získaných z metody nejmenších čtverců.

$m$ [g]	$\sigma_m$ [g]	$M$ [N · m]	$\sigma_M$ [N · m]	$\Delta\varphi_1$ [°]	$\sigma_{\Delta\varphi_1}$ [°]	$\Delta\varphi_2$ [°]	$\sigma_{\Delta\varphi_2}$ [°]
201,64	0,03	0,0401	0,0002	10,0	0,5	9,5	0,5
403,36	0,04	0,0801	0,0004	24,0	0,5	23,5	0,5
605,04	0,05	0,1202	0,0006	32,5	0,5	33,5	0,5
805,76	0,06	0,1601	0,0008	44,5	0,5	45,5	0,5
1008,02	0,06	0,2000	0,0010	54,5	0,5	54,5	0,5
1209,00	0,07	0,2400	0,0010	61,5	0,5	61,5	0,5

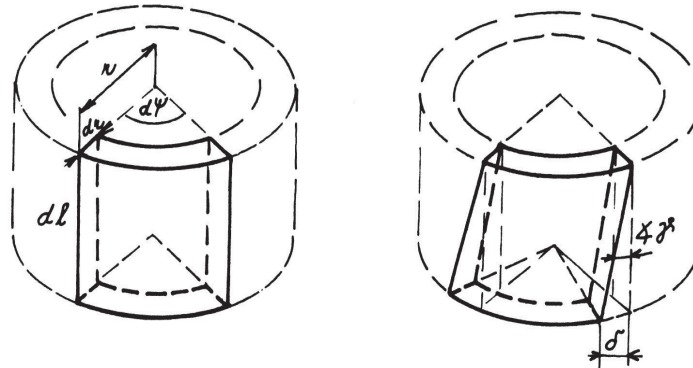
Tab. 3: Naměřené a spočítané hodnoty při měření modulu pružnosti ve smyku  $G$  torzí drátu statickou metodou:  $m$  a  $\sigma_m$  jsou celková hmotnost zavěšených závaží s chybou,  $M$  a  $\sigma_M$  moment sil tvořený závažími a jeho chyba (5.4),  $\Delta\varphi_{1,2}$  úhly torze odečtené z úhloměru a  $\sigma_{\Delta\varphi_{1,2}}$  jejich chyby.



Obr. 3: Graf závislosti změny torzního úhlu  $\Delta\varphi_{(1,2)}$  na silovém momentu  $M$  působícím vlivem dvou sad závaží při zatěžování a odlehčování. Proloženo funkcí inverzní k  $f(x) = ax + b$  s druhou řadou parametrů získaných z metody nejmenších čtverců.

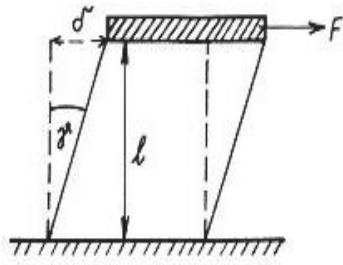
$T_1$ [s]	$\sigma_{T_1}$ [s]	$T_0$ [s]	$\sigma_{T_0}$ [s]
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,2	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1
13,3	0,1	4,3	0,1

Tab. 4: Spočítané hodnoty při měření modulu pružnosti ve smyku  $G$  torzí drátu dynamickou metodou:  $T_1$  a  $\sigma_{T_1}$  jsou periody získané postupnou metodou (z deseti různých intervalů deseti period) s příslušnou chybou (5.2) při kmitání tyče s velkými disky na okrajích,  $T_0$  a  $\sigma_{T_0}$  pak analogicky pro kmitání samotné tyče.

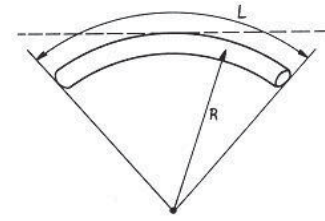


Obr. 4: Smyk elementárního hranolu vyříznutého z válce při torzi [1]

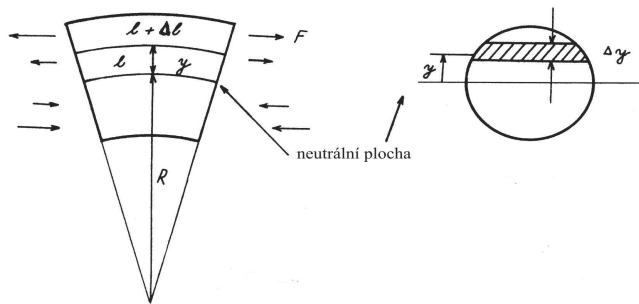
## 5.4 Schémata



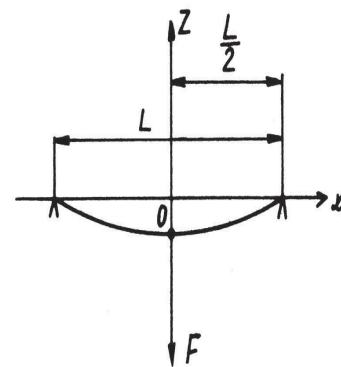
Obr. 5: Schéma smyku [1]



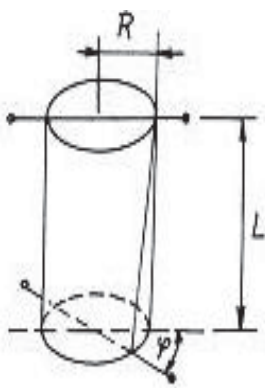
Obr. 6: Ohyb nosníku [1]



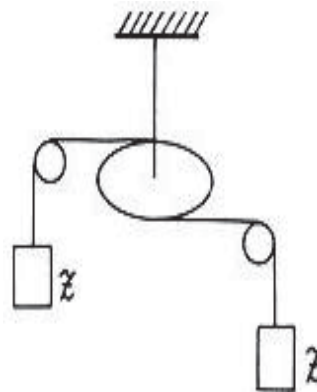
Obr. 7: Neutrální plocha, deformace nosníku při ohybu [1]



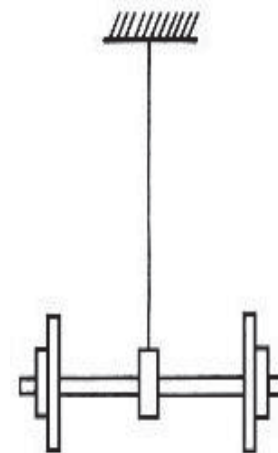
Obr. 8: Ohyb nosníku podepřeného na břitech [1]



Obr. 9: Torze válce kruhového průřezu [1]



Obr. 10: Zařízení pro měření modulu pružnosti ve smyku statickou metodou [1]



Obr. 11: Zařízení pro měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou [1]