

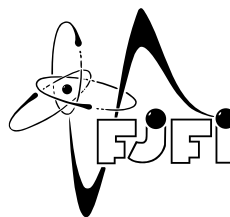
Datum měření: 28.4.2014

Skupina: 7

Jméno: David Roesel

Kroužek: ZS 7

Spolupracovala: Tereza Schönfeldová Klasifikace:



## 1 Pracovní úkoly

- (Nepovinné)** V přípravě nalezněte obecně pro  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  podmínku nejmenší deviace  $\alpha_1 = \alpha_2$  a z toho odvoďte vzorec (12) v zadání [1].  
**Návod:** Uvědomte si, že deviace  $\varepsilon$  je složenou funkcí  $\alpha_1 : \varepsilon = \varepsilon(\alpha_2(\beta_2(\beta_1(\alpha_1))))$
- V přípravě odvoďte vzorec (12) v zadání [1] v případě, že je splněna podmínka nejmenší deviace  $\alpha_1 = \alpha_2$ .
- V přípravě vypočítejte (i numericky) hodnotu Rydbergovy konstanty (tj. odvoďte vztah (11) ze vztahů (6), (10) a (9) v zadání [1]).
- V přípravě odvoďte vzorce (14) a (17) ze zadání [1].
- Metodou dělených svazků změřte lámavý úhel hranolu. Měření proveďte 5x.
- Změřte index lomu hranolu v závislosti na vlnové délce pro čáry rtuťového spektra, nakreslete graf a fitováním nelineární funkcí (13) z [1] určete disperzní vztah  $n = n(\lambda)$ .
- Změřte spektrum vodíkové výbojky (Balmerovu sérii atomu vodíku) a ověřte platnost vztahu (3) z [1].
- Metodou nejmenších čtverců nebo fitováním spočítejte Rydbergovu konstantu pro atomární vodík. Výpočet této konstanty je analogický jako výpočet Planckovy konstanty v úloze Studium rentgenového spektra Mo anody. Podívejte se na úkol č. 4 této úlohy.
- Určete charakteristickou disperzi  $dn/d\lambda$  v okolí vlnové délky 589 nm (žluté čáry v sodíkovém spektru).
- Určete rozlišovací schopnost hranolu pro sodíkový dublet a vypočítejte minimální velikost základny hranolu, vyrobeného ze stejného materiálu jako hranol, s kterým měříte, který je ještě schopen rozlišit sodíkový dublet.

## 2 Vypracování

### 2.1 Použité přístroje

Goniometr, kolimátor, dalekohled, rtuťová, sodíková a vodíková výbojka, hranol, mobilní telefon, lupa.

### 2.2 Teoretický úvod

#### 2.2.1 Úhel nejmenší deviace

Při měření úhlu nejmenší deviace  $\varepsilon_0$  vycházíme ze vzorce

$$\varepsilon_0 = \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2}, \quad (1)$$

kde  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  jsou úhly, které pro danou spektrální čáru odečteme z goniometru (a to v obou zrcadlových sestaveních experimentu). Pro detailní odvození viz domácí příprava.

## 2.3 Index lomu

Platí-li podmínka nejmenší deviace  $\varepsilon_0$ , můžeme relativní index lomu spočítat pomocí vztahu

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon_0 + \varphi}{2}\right)}{\sin(\varphi/2)}, \quad (2)$$

kde  $\varepsilon_0$  je úhel nejmenší deviace a  $\varphi$  je lámavý úhel hranolu. Pro detailní odvození viz domácí příprava.

### 2.3.1 Spektrální série energetických hladin atomu vodíku

Během studia spektrálních čar atomistického vodíku bylo v roce 1885 zjištěno, že pro vlnové délky čtyř čar jeho spektra označených  $H_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$  jdou jejich hodnoty vyjádřit empirickým vztahem

$$\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 4}, \quad n = 3, 4, 5, 6, \quad B = 364,56 \text{ nm}. \quad (3)$$

Vlnové délky  $\lambda$  spektrálních čar lze pro atomární vodík ve viditelném spektru vyjádřit podle vztahu

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{4}{B} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (4)$$

kde  $4/B = R$ , což je tzv. *Rydbergova konstanta*.

### 2.3.2 Disperzní závislost

Průběh disperzní závislosti jde aproximovat různými vzorci. My budeme využívat následujícího vztahu

$$n = n_n + \frac{C}{\lambda - \lambda_n}, \quad (5)$$

kde  $n_n$ ,  $C$  a  $\lambda_n$  jsou konstanty, které určíme lineární regresí této funkce z naměřených dat.

## 2.4 Rozlišovací schopnost hranolu

Uvažujme rovnoramenný hranol. Rozlišovací schopnost je přímo ovlivňována ohybovými jevy, které nastávají při průchodu světla hranolem. Obvykle tuto schopnost charakterizujeme veličinou

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (6)$$

kde  $\Delta\lambda$  je minimální diference vlnových délek, které ještě mohou být hranolem rozlišeny. Z odvození v domácí přípravě přímo plyne, že pro náš případ (za uvažování svazku rovnoběžných paprsků a dodržení podmínky pro minimální deviaci) platí

$$R = a \frac{dn}{d\lambda}, \quad (7)$$

kde  $a$  je délka  $|BC|$  z Obr. 4 v [1].

## 2.5 Postup měření

### 2.5.1 Lámavý úhel hranolu

Nejprve jsme chtěli změřit lámavý úhel hranolu  $\varphi$ , který potřebujeme pro zpracování všech následujících měření. Stolek s hranolem jsme nastavili tak, aby světlo dopadalo téměř přímo na hranu hranolu, tedy aby docházelo k odrazu a ne k lomu světla. Následně jsme použili kolimátor tak, aby na hranol dopadalo světlo pouze v podobě úzkého proužku, který jsme poté hledali v dalekohledu. Pomocí goniometru jsme následně změřili úhel mezi oběma obrazy a jeho polovina nám udávala lámavý úhel  $\varphi$ .

### 2.5.2 Úhel minimální deviace

Před štěrbinu kolimátoru jsme umístili daný zdroj světla (např. rtuťovou výbojku) a nastavili jsme hranol tak, aby docházelo k lomu světla. V dalekohledu jsme následně hledali spektrální čáry a porovnávali je s teoretickou podobou spektra přímo u úlohy. Za otáčení stolku i dalekohledu jsme následně hledali moment, kdy se spektrální čáry přestanou pohybovat jedním směrem a začnou putovat směrem druhým. V momentu tohoto zastavení spektrálních čar jsme odečetli úhel na goniometru pro každou z nich. Postup jsme opakovali taktéž pro druhou lámavou hranu našeho hranolu.

## 2.6 Naměřené hodnoty

### 2.6.1 Lámavý úhel hranolu

Naměřené hodnoty pro výpočet lámavého úhlu hranolu jsou uvedeny v Tab. 1. Hodnotu tohoto úhlu jsme pro každé měření určili jako polovinu rozdílu úhlů obou odrazů a finální hodnotu lámavého úhlu jsme spočítali jako aritmetický průměr našich měření (6.1) s chybou podle (6.2) a finální hodnotou

$$\varphi = (60,05 \pm 0,02)^\circ. \quad (8)$$

| $\varphi_1$ [°] | $\varphi_2$ [°] | $\varphi$ [°] |
|-----------------|-----------------|---------------|
| 41,42           | 281,13          | 60,14         |
| 37,72           | 277,62          | 60,05         |
| 40,80           | 280,75          | 60,03         |
| 39,62           | 279,62          | 60,00         |
| 46,48           | 286,42          | 60,03         |

Tab. 1: Naměřené hodnoty pro výpočet lámavého úhlu hranolu;  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  jsou úhly obou obrazů určené s chybou  $0,02^\circ$ ,  $\varphi$  je pak z nich vypočítaná hodnota lámavého úhlu pro každé měření.

### 2.6.2 Index lomu pro čáry rtuťového spektra

Naměřené hodnoty pro výpočet úhlu minimální deviace (1) a tím i indexu lomu (2) pro každou ze spektrálních čar rtuťového spektra jsou uvedeny v Tab. 2 s chybami určenými podle (6.4). Naměřené hodnoty jsou také vyneseny do grafu na Obr. 1. Disperzní vztah jsme určili jako

$$n(\lambda) = (1,508 \pm 0,002) + \frac{(3 \pm 1)}{\lambda - (273 \pm 30)} [-]. \quad (9)$$

### 2.6.3 Spektrum vodíkové výbojky

Naměřené hodnoty pro spektrum vodíkové výbojky jsou vyneseny v Tab. 3. Hodnoty vlnových délek, vypočítané z nich podle předchozího vztahu s chybou podle (6.4), jsou následně vyneseny do grafu na Obr. 2 a proloženy za účelem výpočtu Rydbergovy konstanty pro atomický vodík, kterou jsme určili jako

$$R = (0,0108 \pm 0,0003) \text{ nm}^{-1}. \quad (10)$$

| $\lambda$ [nm] | $d_1$ [°] | $d_2$ [°] | $\varepsilon_0$ [°] | $n$ [–] |
|----------------|-----------|-----------|---------------------|---------|
| 690,7          | 26,63     | 309,40    | 38,62               | 1,5159  |
| 579,1          | 26,77     | 309,22    | 38,78               | 1,5177  |
| 546,1          | 26,88     | 309,10    | 38,89               | 1,5190  |
| 491,6          | 27,15     | 308,80    | 39,18               | 1,5222  |
| 435,8          | 27,60     | 308,32    | 39,64               | 1,5275  |
| 407,8          | 27,82     | 308,00    | 39,91               | 1,5305  |

Tab. 2: Naměřené a vypočítané hodnoty pro spektrum  $Hg$ ;  $\lambda$  je vlnová délka dané spektrální čáry [4],  $d_1$  a  $d_2$  jsou úhly obou odrazů určené s chybou  $0,02^\circ$ ,  $\varepsilon_0$  je z nich spočítaný úhel nejmenší deviace (1) s chybou  $0,01^\circ$  (6.4) a  $n$  index lomu pro danou spektrální čáru vypočítaný podle (2) s chybou všech měření (po zaokrouhlení)  $0,0003$  (6.4).

| $\lambda$ [nm] | $d_1$ [°] | $d_2$ [°] | $\varepsilon_0$ [°] | $n$ [–] | $n_t$ [–] | $\sigma_{n_t}$ [–] |
|----------------|-----------|-----------|---------------------|---------|-----------|--------------------|
| 656,3          | 26,28     | 309,17    | 38,56               | 1,5152  | 1,5       | 0,2                |
| 486,1          | 27,00     | 308,67    | 39,17               | 1,5221  | 1,5       | 0,4                |
| 434,0          | 27,72     | 308,18    | 39,77               | 1,5289  | 1,5       | 0,6                |

Tab. 3: Naměřené a vypočítané hodnoty pro spektrum  $H_2$ ;  $\lambda$  je vlnová délka dané spektrální čáry [4],  $d_1$  a  $d_2$  jsou úhly obou odrazů určené s chybou  $0,02^\circ$ ,  $\varepsilon_0$  je z nich spočítaný úhel nejmenší deviace (1) s chybou  $0,01^\circ$  (6.4),  $n$  index lomu pro danou spektrální čáru vypočítaný podle (2) s chybou všech měření (po zaokrouhlení)  $0,0003$  (6.4) a  $n_t$ ,  $\sigma_{n_t}$  je teoretické hodnota indexu lomu spočítaná pomocí disperzního vztahu (9) i se svou chybou (6.4).

#### 2.6.4 Sodíkové spektrum

Charakteristickou disperzi jsme určili zderivováním vztahu (2) a následným dosazením vlnové délky  $\lambda = 589$  nm a parametrů fitu získaných pro rtuťové spektrum. Tímto postupem jsme získali hodnotu charakteristické disperze v okolí žluté čáry v sodíkovém spektru jako

$$\frac{dn}{d\lambda} = (3 \pm 1) \cdot 10^5 \text{ [–]}. \quad (11)$$

#### 2.6.5 Rozlišovací schopnost hranolu

Z údajů u úlohy plynulo, že bychom sodíkový dublet měli pozorovat na vlnových délkách 588,9 a 589,6 nm. Rozlišovací schopnost jsme určili podle vztahu (6) za použití  $\lambda = (589,3 \pm 0,4)$  nm (aritmetického průměru těchto délek) s chybou podle (6.4) jako

$$R_{Na} = (841,8 \pm 0,5) \text{ [–]}. \quad (12)$$

Z této hodnoty následně můžeme také vypočítat, jak velký by musel být hranol, abychom pomocí něj mohli sodíkový dublet pozorovat. Délku hranolu  $a$  jsme spočítali podle vztahu (7) s chybou podle (6.4) a určili jsme její hodnotu na

$$a = (3 \pm 1) \text{ cm}. \quad (13)$$

### 2.7 Diskuse

Už při měření lámavého úhlu  $\varphi$  bylo jasné, že určení úhlu je méně přesné, než nejmenší dílek měřítka. U všech měření počítáme s chybou  $0,02^\circ$ , ale dalekohled nebylo snadné umístit přesně do středu proužku (nebo na rozhraní barev spektra v dalších úlohách) a vznikala tak větší chyba než několik dílků měřítka.

Uváděné úhly jsou přímo hodnoty odečtené z měřítka. Pro výpočty bylo potřeba přičíst ke druhému úhlu  $360^\circ$  jako korekci za použité měřítka. Odečítání úhlů z měřítka bylo také zkomplikované špatnými světelnými podmínkami v místnosti a tím jak výrazně se stupnice leskla.

Index lomu pro čáry rtuťového spektra se nám podařilo určit úspěšně a pozorovali jsme každou z teoreticky předpokládaných [4]. Naměřené hodnoty se nám následně podařilo také rozumně nafitovat a získat tak kýženou závislost. Závislost by šlo zpřesnit hledáním více známých pozic ve spektru, ale parametry by to pravděpodobně příliš neovlivnilo (maximálně by to zmenšilo jejich předpokládanou chybu).

Při proměřování spektra vodíkové výbojky se nám bohužel podařilo nalézt pouze tři ze čtyř předpokládaných spektrálních čar (viděli jsme modrou, ale fialovou už se nám nepodařilo rozpoznat). Při tomto měření mohlo dojít, vzhledem k odchylce od tabulkové hodnoty, k chybnému odečtení úhlu z goniometru. Měření by se dalo zlepšit naměřením úhlů vícekrát, případně použitím většího počtu definovaných (a viditelných) čar spektra.

Tyto hodnoty jsme i tak vynesli do grafu a proložili je závislostí pro zjištění Rydbergovy konstanty. I přes nepřesně změřené hodnoty a jejich malý počet nám k parametru fitu  $R$  program *GNUplot* určil relativně nízkou hodnotu chyby. Hodnota Rydbergovy konstanty nám vyšla  $R = (0,0108 \pm 0,0003) \text{ nm}^{-1}$ , což je velice blízko v domácí přípravě odvozené hodnotě  $R = 0,0110 \text{ nm}^{-1}$ , i když se tato teoretická hodnota jen těsně dotýká chybového intervalu určeného fitem. Celkově můžeme říct, že závislost odpovídá našim hodnotám a že se nám vztah podařilo ověřit úspěšně.

Sodíkový dublet se nám s naším hranolem rozlišit nepodařilo. Vypočítali jsme, že minimální velikost hranolu pro rozlišení dubletu by odpovídala délce stěny  $a = (3 \pm 1) \text{ cm}$ , což přímo nezaručuje, že by to s naším hranolem jít muselo. Kromě rozměru hranolu však naši schopnost rozlišení dubletu pravděpodobně ovlivňovala také velikost štěrbin kolimátoru, špatné světelné podmínky v místnosti, případně jiné nedokonalosti našich pozorovacích prostředků. S větším hranolem by však byla pravděpodobnost rozlišení dubletu o poznání větší.

### 3 Závěr

V přípravě jsme odvodili vzorec (12) z [1] pro splněnou podmínku  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Tamtéž jsme vypočetli (i numericky) hodnotu Rydbergovy konstanty  $R$  a vzorce (14) a (17) z [1].

Úspěšně jsme změřili lámavý úhel hranolu a jeho index lomu v závislosti na vlnové délce pro čáry rtuťového spektra. Nakreslili jsme graf a fitováním jsme určili disperzní vztah  $n = n(\lambda)$ . Změřili jsme také spektrum vodíkové výbojky (Balmerovy série vodíku) a ověřili platnost vztahu (3) z [1]. Fitováním jsme z tohoto grafu spočetli Rydbergovu konstantu pro atomární vodík.

Nakonec jsme určili charakteristickou disperzi  $dn/d\lambda$  v okolí vlnové délky 589 nm, tedy žluté čáry v sodíkovém spektru. Za pomoci tohoto výsledku jsme pak určili rozlišovací schopnost hranolu pro sodíkový dublet a vypočítali minimální velikost základny hranolu, vyrobeného ze stejného materiálu jako hranol, se kterým jsme měřili, který je ještě schopen rozlišit sodíkový dublet.

### 4 Použitá literatura

- [1] Kolektiv KF, *Návod k úloze: Balmerova série* [Online], [cit. 4. května 2014]  
[http://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/417/mod\\_resource/content/1/4-Balmer.pdf](http://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/417/mod_resource/content/1/4-Balmer.pdf)
- [2] Kolektiv KF, *Chyby měření* [Online], [cit. 4. května 2014]  
<http://praktikum.fjfi.cvut.cz/documents/chybynav/chyby-o.pdf>
- [3] J. Mikulčák a kol., *Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce*. Prometheus, Praha 2009.  
ISBN 978-80-7196-264-9
- [4] Kolektiv KF, *Tabulka vlnových délek spektrálních čar (u úloh)*

# Přílohy

## 5 Domácí příprava

Domácí příprava je přiložena k protokolu.

## 6 Statistické zpracování dat

Pro statistické zpracování využíváme aritmetického průměru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (6.1)$$

jehož chybu spočítáme jako

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6.2)$$

kde  $x_i$  jsou jednotlivé naměřené hodnoty,  $n$  je počet měření,  $\bar{x}$  aritmetický průměr a  $\sigma_0$  jeho chyba [2].  
Při nepřímém měření počítáme hodnotu s chybou dle následujících vztahů:

$$u = f(x, y, z, \dots), \quad (6.3)$$

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_x), \quad y = (\bar{y} \pm \sigma_y), \quad z = (\bar{z} \pm \sigma_z), \quad \dots,$$

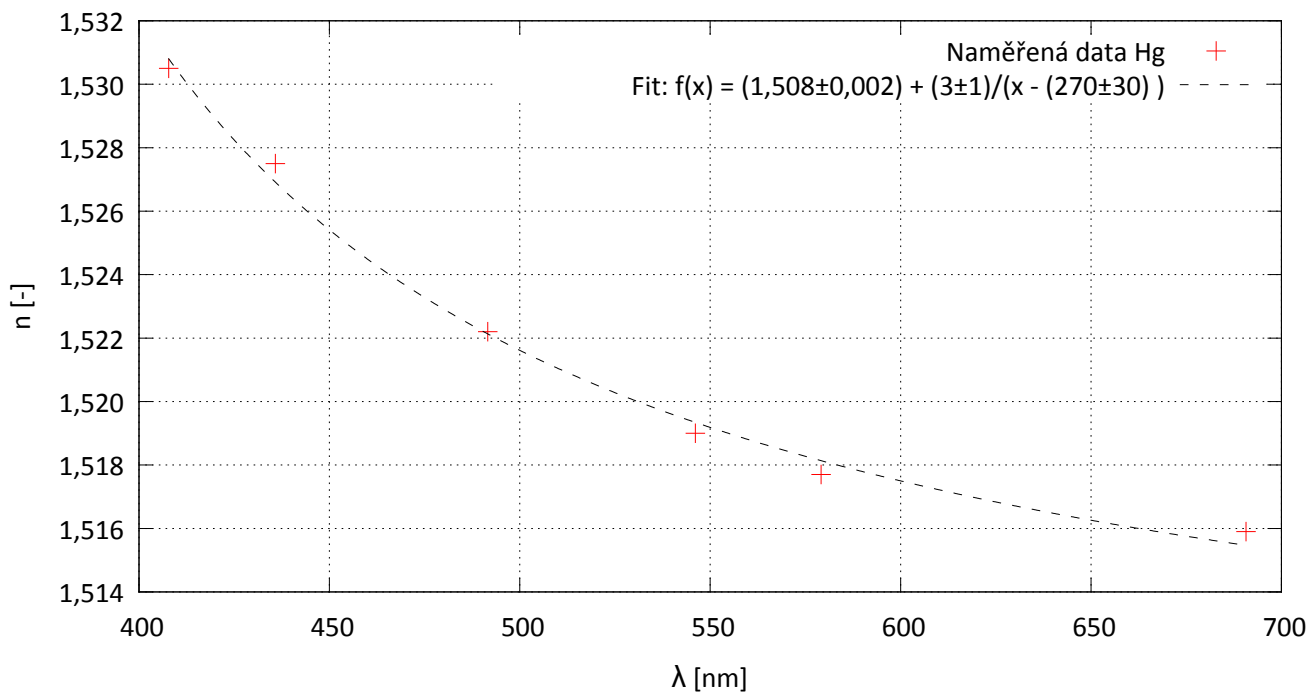
kde  $u$  je veličina, kterou určíme nepřímo z měřených veličin  $x, y, z, \dots$

Pak

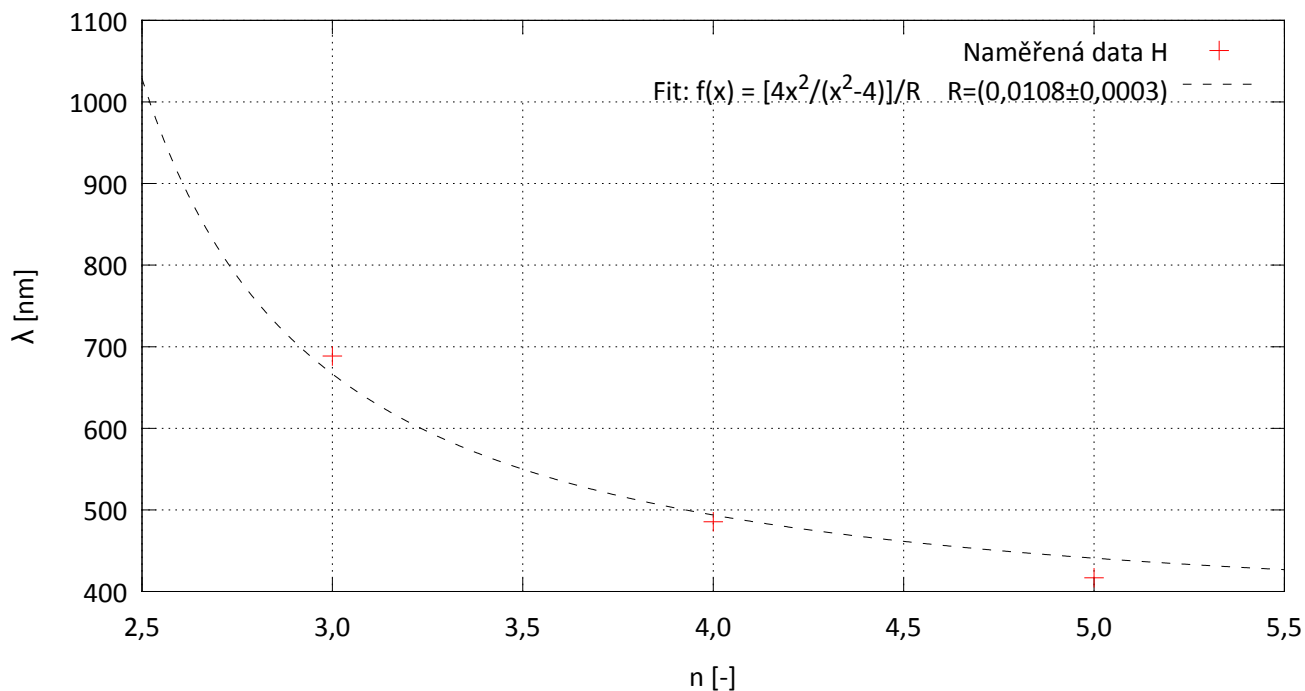
$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots),$$

$$\sigma_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots}, \quad (6.4)$$
$$u = (\bar{u} \pm \sigma_u).$$

## 7 Tabulky a grafy



Obr. 1: Závislost vypočítaného indexu lomu  $n$  na teoretické vlnové délce  $\lambda$  [4]. Hodnoty jsou následně proloženy funkcí (5).



Obr. 2: Závislost změřené vlnové délky  $\lambda$  na parametru  $n$  pro spektrální čáry vodíkové výbojky. Hodnoty jsou následně proloženy funkcí (4) pro určení *Rydbergovy konstanty*  $R$ .